Notes of Category Theory

MGIO

2024.10.15

目录

1 写在前面

这是关于 category Theory 的小笔记, 不知道我会写到哪里。主要参考书目是 *Basic Category Theory*[1]

2 what is category

Definition 2.1. A category $\mathcal{C}$ consist of the following data

- a class of **objects** $\boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$
- for each $A, B \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$,there exist a set $\boldsymbol{Hom_{\mathcal{C}}(A,B)}$ of **morphisms** from A to B
- for each $A, B, C \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$,there exist a funtion s.t.

$$Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(g, f) \mapsto (g \circ f)$$

called **composition** and satisfy the following axioms

- for each $A \in \boldsymbol{Ob(\mathcal{C})}$, there is an element 1_A in $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ called identity on A satisfy the idenity laws i.e. for each $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$
- for each $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C), h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, we have associativity i.e. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

我们来简单解释一下范畴的定义, 范畴的主要对象是 Object(对象) 和 morphism(态射) 以及 composition(复合), 态射类比成映射, 对象类比成 domain 与 codomain, 复合就是映射之间的复合, 而满足的那两条公理也正是映射需要满足的, 这是一种帮助我们理解范畴的方式, 但在后面的例子我们可以看到这不是完全合理的，这仅仅是一种辅助手段。当然定义完范畴后有一个非常自然的问题, 范畴究竟是什么? 如同我们学习其他数学概念之后, 例如我们知道映射实际上是一个 $A \times B$ 的特殊子集, 群是一个序对 $(G, \cdot)$ 等等。但是我们这里的范畴是什么东西呢? 在回答这个问题之前，我们先解决一些集合论上的小麻烦, 这里我们的对象构成的全体可能会非常大, 大到我们的 ZFC 公理体系下需要把他排除去 (例如所谓全体集合的“集合”[1]), 这里有这样几种处理方式, 在 *A First Course in Category* by Ana Agore 中, 它引入了另一种公理体系 NBG, 这是 ZFC 公理体系的 conservative extension(保守扩张, i.e. 所有 ZFC 中为真的 statement 在 NBG 中也为真, 在 NBG 中用 ZFC 语言写的为真的 statement 在 ZFC 中也为真), 在 NBG 中 class 是被严格定义的, 所以我们可以在 NBG 中处理范畴, 这样就没有逻辑上的错误了。但同样的在 NBG 中所有 class 的 class 又是被排除在外的, 我们又无法处理这个问题了, 但是鉴于我们只关心集合这个概念, 所以这其实不是什么问题, 至少对于现在的我来说已经够用了。第二种处理方法是李文威老师的代数学方法卷一或者是 *Categories and Sheaves* 中引入的

[1]在朴素集合论中会产生 Russell's Paradox 的原因是概括公理太强大了, 所以我们用分离概括模式来限制概括公理, 分离公理模式不能确定 $R = \{x \mid x \notin x\}$ 是一个集合, 换言之我们把这种形式的集合给他排除去 ZF 意义下的集合了, 同时在承认分离概括模式的意义下, 对于集合 X,$R_X = \{x \in X \mid x \notin x\}$, $R_X \in R_X$ 或 $R_X \notin R_X$, 为前者, 则有 $R_X \in X$ 且 $R_X \notin R_X$ 矛盾, 只能为后者, 此时 $R_X \notin X$, 我们就不能像朴素集合论中一样推出 $R_X \in R_X$ 这种矛盾了, 我们就证明了所有集合的集合是不存在的. 这里还有一个基础公理, 它将断言集合是不能包含自身的, 但其实这条公理是不能解决 Russell's Paradox(此时我们只能有 $X \notin X$, 这依然会推出 $X \in X$), 所以集合包不包括自身其实不影响 Russell's Paradox, 在有些集合理论中是允许这样的集合存在, 而有些集合理论中则不允许这样的集合存在

Grothendieck universe。第三种处理方式是 GTM5 中的 metacategories. 后两种我们怎么看懂, 第一种对于我来说已经够用了。

现在我们来回答范畴究竟是什么东西, 实际上采用 universe 的观点, 我们可以将范畴看成是一个三元序对 (与集合论的序对不同, 但是感觉上是类似的)。但是我更青睐于这种理解, 我们定义范畴只需要声明以下东西, 对象是什么, 对象之间的态射是什么, 态射之间的复合是什么, 它们要满足 identity laws 和 associativity. 只要我们说明了这几条, 那就说我们定义了一个范畴, 我们不需要关心范畴究竟是什么, 就像其实我们并不关心群是什么, 我们关心的是集合 G 和上面的运算 $\cdot$, 我们说群是一个序对更多的是为了心理上的满足。

很显然对于任意的对象 A,1_A 是唯一的, $1_A \circ 1'_A = 1_A = 1'_A$

Remark. 在这里的定义中我们要求对象 A, B 之间的态射是一个集合而不是 proper class, 但这并不总是被要求的, 一些书籍中称满足这条性质的范畴为 **locally small**, 同时需要注意的虽然我们要求范畴的态射是集合, 但是它们一起并不一定会构成一个集合, 例子也很简单, 考虑对象类是真类的 discrete category。

下面我们来看看例子

Examples 2.1.1 (**Set**)**.** 对象是全体集合, 集合 A, B 的态射是它们之间的映射, 态射之间的复合就是它们映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**集合范畴 Set**

Examples 2.1.2 (**Grp**)**.** 对象是全体群, 群 G_1, G_2 的态射是它们之间的群同态, 态射之间的复合就是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**群范畴 Grp**

Examples 2.1.3 (**Ring**)**.** 对象是全体 ring, ringG_1, G_2 的态射是它们之间的 ring homomorphism, 态射之间的复合就是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为 **ring 范畴 Ring**

Examples 2.1.4 (**Vect**$_k$)**.** 对象是域 k 上的全体线性空间, 态射是线性空间的线性映射, 态射之间的复合是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**域 k 上的线性空间范畴 Vect**$_k$

Examples 2.1.5 (**Top**)**.** 对象是全体拓扑空间, 态射是拓扑空间的连续映射, 态射之间的复合是它们作为映射的复合, 容易验证这满足另外两条公理, 所以我们定义了一个范畴称为**拓扑空间范畴 Top**

这些都是非常不错的 examples, 但是范畴的内涵远不止于此, 特别是这五个例子的态射都是我们熟悉的映射, 这可能会在初学时带来对态射的不太准确的理解, 在后面的例子中我们会看到完全不像映射的态射。再次之前我们再介绍两个概念。

Definition 2.2 (source and target)**.** if $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, we call A the source and B the target of f.

Remark. source 在某些书上也叫做 domain, target 也叫做 codomain, 但是我觉得还是将它们与映射的概念做个区分会好一点, 实际上待会我们会看到将态射简单理解成映射是完全错误的。

Definition 2.3. A morphism $f : A \to B$ in a category $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ is an **isomorphism** if there exists a map $g : B \to A$ in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ s.t. $g \circ f = 1_A$ and $f \circ g = 1_B$

Remark. isomorphism 的概念像在模仿双射 (双射与存在逆映射等价), we call A and B is isomorphic if there exists an isomorphism form A to B and write $A \cong B$, we also call g the inverse of f and write $g = f^{-1}$.

下面是一些例子

Examples 2.3.1. 考虑 **Set**, 则 isomorphism $\in$ **Set** are the bijections. 这是因为集合上的映射是双射当且仅当它可逆, 集合范畴上的 isomorphism 定义恰好是可逆映射的定义。

Examples 2.3.2. 考虑 **Grp**, 则 isomorphism $\in$ **Grp** are the isomorphisms of groups. 这是因为若群同态可逆, 则它是双射, 则为双射同态为群同构, 反之若为群同构, 则群同构的逆为群同态.

Examples 2.3.3. 考虑 **Top**, 则 isomorphism $\in$ **Top** are the homeomorphisms. 这是因为同胚映射是双射, 则它可逆, 且它的逆也是连续映射, 反之若为一个双射, 它和它的逆都是连续的则它为同胚映射。注意连续双射不一定是同胚映射, 例: $id : (\mathbb{R}, \tau_{discrete}) \to (\mathbb{R}, \tau_{metric})$

上面的范畴例子是很基本且重要的, 但是它们都比较特殊: 它们的态射基本上都在某种程度上保持了它们的特殊结构 (代数上或者拓扑上), 它们对象的元素基本是明确的. 我们再次重申：一般来说一个范畴的对象并不是集合装备上特殊的结构, 一个范畴的对象也不一定是类似集合, 一个范畴的态射也不一定相似映射

Examples 2.1.6 考虑对象为空, 态射为空, 其复合也为空的一个范畴, 我们记该范畴为 $\emptyset$.

Remark. 我个人感觉这里和集合论中空集的产生有些类似, 并不是显然的, 需要一些逻辑上的推到论证, 但是我可以理解这个, 我就不过多纠结了。

Examples 2.1.7 考虑一个对象仅为一个元素 A, 态射仅有 1_A, 复合仅有 $1_A \circ 1_A = 1_A$, 我们记该范畴为 $\mathbf{1}$

Examples 2.1.8 考虑对象为两个元素 A, B, 态射为 $f : A \to B$, 1_A, 1_B, 复合如何定义是显然的.

Examples 2.1.9 考虑一个态射仅为 identity 的范畴, 我们称这种范畴是 **discrete category**

Examples 2.1.10 不是所有的范畴的对象都是非常"大"的, 比方说上面我们就提到了一个仅含一个对象的范畴, 更一般的我们称一个范畴是 **small** 的, 如果它的对象类仅为一个集合而不是真类 (proper class)(且它是 locally small 的, 在我们的定义中所有范畴都被认为是 locally small 的, 这条可以被忽略)。虽然 locally small 的范畴的态射集的全体不一定是集合, 但是加强为 small 后, 态射集的全体就是集合了。这是因为 **the union of set-many sets is a set, a small category has set-many mrophisms**. $\bigcup\limits_{A,B\in\mathbf{Ob}(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Note that for locally small categories, having set-many objects and having set-many morphisms in total are equivalent.Proof of left$\Rightarrow$ right we posted above, and notice that each objects correspondent at least one morphism which is identity, thus we have left $\Leftarrow$ right.

Remark. 这几个例子作为抽象的范畴出现可以很好的论证我们所说的范畴的对象不一定类似集合, 态射也不一定相似集合, 实际上我们完全可以把 A 当成是真类, 至于这个态射我们也完全可以认为是 A 自身或者是其他什么有定义的数学概念, 态射实际上就是一个抽象的东西, 并不是映射, 我们可以举一个这样的例子, 考虑 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, \}$, 我们完全可以将 f 定义成 $\{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 7)\}$ 这种东西, 他完全不是一个映射。

下面这个例子是我们理解群的又一种观点。同时将进一步作证态射并非映射

Examples 2.1.10 一个仅有一个对象且上面的态射都是 isomorphism 的范畴的态射集连同上复合运算将构成一个群, 反之一个群实际上就是一个仅有一个对象且上面的态射都是 isomorphism 的范畴的态射集连同上复合运算。考虑这样一个范畴 $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, 考虑态射集 $Hom_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(A, A)$ 连同上复合运算, 这将构成

一个群 (复合的结合律保证则将是一个半群, 1_A 的存在将保证这是一个幺半群, isomorphism 将保证这是一个群) 反之, 我们考虑群 $(G,\cdot)$, 考虑对象为 A 的, 上面的态射就为每个群元素, 态射的复合定义为群的乘法 $\cdot$, 那么该态射集连同上复合恰为该群 $(G,\cdot)$。

Remark. 首先, 从范畴的观点来看, 这是一种新的角度理解群, 它实际上就是某种范畴的态射集连同上上面的复合, 另一方面, 这给我们提供了理解某种范畴的方法, 这种范畴实际上完全可以理解成群 (由于只有一个对象, 所以描述该范畴的时候我们只需要考虑怎么描述上面的态射和复合就行了, 即某种群); 再者, 我们看看范畴上的态射其实是某种群元, 而群元当然可以不是映射, 它实际上可以是任何数学概念, 这更加佐证了态射不是映射。后面我们会提到范畴的等价, 我们可以将该断言用等价的语言描述: the category of groups is equivalent to the category of (small) one-object categories in which every map is an isomorphism. In philosophy, 群是一个包含某种对象的某些对称操作的结构, 对称操作就是你可以逆着回来保持不变的操作, 对于一个对象 X, 上面的可逆态射就是这样一种操作, 所以将群理解成这种特殊的范畴在直觉上是非常合理的。

上面群的例子我们需要考虑逆 (相应的我们需要考虑 isomorphism), 现在我们考虑不要求逆的结构 (monoid).

Examples 2.1.11 一个仅有一个对象的范畴, 它上面的范畴连同上复合运算将构成幺半群, 反之一个幺半群就是一个仅有一个对象的范畴的态射集连同上复合运算。论证和上面的群是几乎一样的。

不仅仅是代数结构, 序结构也可以从范畴的角度来理解.

Examples 2.1.12 preorder 是把偏序集删去反对称性的二元关系 (i.e. $\forall x \in X, x \leq x$ and $\forall x,y,z \in X, x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$) 考虑 preorder set$(X,\leq)$, 考虑以 X 中元素为对象, $\forall A,B \in X$ 至多存在一个态射, 态射 $f: A \to B$ 当且仅当 $A \leq B$, 复合运算 $f: A \to B$,$g: B \to C$, 则 $g \circ f = z: A \to C$, 则 1_A 是存在的, 结合律是满足的, 所以 preorder set 确实可以看成是一个特别的范畴。

看完了这么多例子, 我们来引入下一个概念, 我们知道一个范畴上的态射 $f: A \to B$, 是指 A 指向 B 的, 我们考虑将它反转, 即 $f^{op}: B \to A$, 这种想法使我们引入这样的定义。

Definition 2.4. 对于一个 category $\mathcal{C}$, 考虑范畴 $\mathcal{C}^{op}$ 使得 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, $\forall A,B \in Ob$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B,A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$(for

$f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$, we denote f^{op}), $1_A(\in \mathcal{C}^{op}) = 1_A(\in \mathcal{C})$, 满足结合律, 我们称 $\mathcal{C}^{op}$ 是 $\mathcal{C}$ 的 dual category。

乍一看, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, A) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ 似乎 doesn't make sense, $f : A \to B$,f 又怎么可能会从 B 又到 A 呢? 会有这种困惑还是因为先入为主对映射的感觉用在了理解态射上了, 我们再次重申: 态射不是映射, 你将它理解成抽象的元素而不是映射就不会有这种感觉了, 例如在群或者幺半群那里, 那里的态射我们不久理解成了一个个抽象的群元素吗? 好了我们现在将 f 理解成抽象的元素能够帮助我们理解这两个态射集相等, 但是现在 f 既能是 $f : A \to B$, 也能是 $f : B \to A$, 这未免有点奇怪。这里的关键点是: 虽然我们的 source 和 target 是根据态射 f 来定义的, 但是他其实不是 f 的固有性质, 而是更类似于范畴的性质。简单来说就是同一个 f 可以有不同的 target 和 source, 这一点其实可以从定义中看出, 我们的态射本质上就是一个抽象的元素, 我们可以指定 A, B 之间的态射是 f, 也可以指定 C, D 之间的态射是 f, 再次重申 f 不是一个映射, 只要你满足范畴的公理, f 是什么都无所谓。

实际上这个定义中后两条关于 identity 和 associativity 是冗余的。$(f^{op} \circ g^{op}) \circ h^{op} = (g \circ f)^{op} \circ h^{op} = (h \circ (g \circ f))^{op} = ((h \circ g) \circ f)^{op} = f^{op} \circ (h \circ g)^{op} = f^{op} \circ (g^{op} \circ h^{op})$.
$1_A \circ f^{op} = (f \circ 1_A)^{op} = f^{op} = f^{op} \circ 1_B$ 显然每个范畴都存在对偶范畴, 再引入范畴的等价后我们会说明每个范畴的对偶范畴在等价的意义下是唯一的。

Remark (principle of duality). 简单来说对偶范畴是调转了箭头, 我们对每个定义, 定理和证明都可以这样调转箭头, 从而得到一个与之对偶的定义, 定理, 证明, 我们会在后面见到例子。

Definition 2.5. 给定范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, 考虑这样一个范畴 $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, 其对象是 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$, 其态射 $Hom((A, B), (A', B')) = Hom(A, A') \times Hom(B, B')$ 我们将在下面的练习中写出它的复合和 identity.

Exercises

2.1 Find three examples of categories not mentioned above.

Solution: 1.R 是一个 ring, 考虑全体 $R{-}module$, 态射是 $module{-}homomorphism$, 复合是映射的复合. 2. 考虑全体度量空间, 态射是保测映射, 复合是映射的复合. 3. 考虑全体域, 态射是域同态, 复合是映射的复合.

2.2 Show that a map in a category can have at most one inverse.

Solution: Already posted above.
2.3 Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. There is only one sensible way to define composition and identities in product category of $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$, write it down.
Solution:

Composition: $Hom((A',B'),(C,D)) \times Hom((A,B),(A',B')) \to Hom((A,B),(C,D))$
$((f',g'),(f,g)) \mapsto (f' \circ f, g' \circ g)$

identity in $Hom((A,B),(A,B))$ is $(1_A, 1_B)$

3 what is functor

Definition 3.1. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. A **functor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consists of following data

- a function
$$Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$$
written as $A \mapsto F(A)$

- for each $A, A' \in \mathcal{C}$, a funtion
$$Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(A'))$$
written as $f \mapsto F(f)$,

satisfying the following axioms:

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ whenever $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ in $\mathcal{C}$;

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ whenever $A \in \mathcal{C}$

简单来说, 为了定义函子我们只需要说明两点 1. 对象类到对象类的映射, 我们知道对象可能会构成一个真类, 所以这里的映射并不完全是我们处理集合上的映射那样, 但是可以完全把它当成集合上的映射来理解, 其中有一些非常基础性集合论的工作, 细节我完全不知道, 我们现在只需要知道这里的映射可以完全当成集合上的映射来理解, (domain 的元素有且仅有一个 image 在 codomain 中), 2. 态射集到态射集的映射, 它们需要满足 identity 映过去是相应的 identity, 态射的复合映过去是态射的像的复合。函子其实有点像范畴上的同态, 他把幺元映成幺元, 保持态射集上的运算. 函子这个

定义的 motivation 可能是: 考虑以范畴为对象的范畴, 为了让它变成一个范畴, 我们得定义范畴之间的态射, 范畴之间的态射就是函子.

Examples 3.1.1. 考虑对象类为全体 small category(这是类, 他不会比所有集合组成的类更大了, 因为将 small category 理解成三元对 $(OB, HOM, \circ)$ 恰为一个集合), 态射为范畴之间的函子, 我们需要定义函子之间的复合:

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$, 考虑 $\mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Ob}(\mathcal{E}) : A \mapsto F(A) \mapsto G(F(A))$

$Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{E}}(G(F(A)), G(F(A'))) : f \mapsto F(f) \mapsto G(F(f))$ 不难验证这满足两条函子的公理, 我们称这个函子为 F, G 的复合, 记为 $G \circ F$. 当然我们还得说明这里的态射是一个集合, 也就是从 small category $\mathcal{C}$ 到 small category $\mathcal{D}$ 的函子的全体构成一个集合而不是真类. 首先, 一个函子其实也是一个二元对 (function between class of objects, functions between all set of morphism), 从 class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ 到 class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ 的 function 全体构成一个 class(a function is a subclass of class $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{C}})\times$ $\mathbf{Ob}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$, all subclass of class is a class just as set(I guess), so all functions form a class), and all set functions between two sets form a set, union of class-many classes is classed just as set(I guess), so $\bigcup_{A,A' \in Ob(\mathcal{C})} \{somefunctionsfromHom_{\mathcal{C}}(A, A')toHom_{\mathcal{D}}(F(A), F(A'))\}$ is a class. 一个函子可被认为是这两个类的积的子类. 或者说所有态射集到态射集的函数可以被认为是 class $Mor(\mathcal{C})$ 到 class $Mor(\mathcal{D})$ 的所有函数构成的类的子类, 即 $(\mathbf{Ob}(\mathcal{C})^{\mathbf{Ob}(\mathcal{D})} \times Mor(\mathcal{C})^{Mor(\mathcal{D})})$ 的子类, 注意到我们这里是 small category, 这意味着所有对象和所有态射都将构成集合, 所以这是集合的子集, 也就是态射之间的函子将构成集合. identity 这样一个函子, 它把对象映成自己, 把所有的态射也映成自己, associativity 是显然的。这样一个范畴我们记为 **CAT**.

我们通过几个例子来感受一下 **forgetful functor(遗忘函子)**

Examples 3.1.2. 考虑范畴 **Grp** 和 **Set**, 考虑对象类之间的映射: 群 G 首先也是一个集合, 记为 $U(G)$, $F(G) = U(G)$, 即把群 G 映为其对应的集合, 群同态 f 也是一个集合间的映射, 所以可以考虑 $F(f) = f$, 即把群之间的群同态映为其作为集合的映射, 在这样的定义下两条公理显然满足, 这样我们就定义了一个从 **Grp** 到 **Set** 的函子, 这个函子" 遗忘" 了群的结构, 让群变成了集合, " 遗忘" 了群同态的保结构性, 让群同态变成了简单的映射。

Examples 3.1.3. 考虑范畴 **Ring** 和 **Set**, 将 ring$R$ 映为其对应的集合, 将 $ringhomomorphism$ 映为简单的映射. 这定义了 **Ring** 到 **Set** 的函子, 遗忘

了 ring structure, 其他代数结构例如 field or vector space 都可以这样定义, 遗忘集合上面的代数结构来变成简单的集合, 遗忘保持结构的映射变成平凡的映射。

但是 forgetful functor 不会遗忘掉所有的结构, 我们会在下面的例子看到这一点。

Examples 3.1.4. Consider **Ab**(i.e. category of abelian groups). 考虑 **Ring** 到 **Ab** 的函子如下: 注意到 ring 始终是一个 abelian group, 我们把 ring 映成其自身, 但是我们选择性的遗忘 multipication operater, 即将 ring homomorphism 映为其相应的 group homomorphism, 这样我们遗忘掉了 ring 的部分结构 (乘法部分), 让他变成了 abelian group. 我们还可以考虑 **Ring** 到 **Monoid** 的函子: 通过遗忘加法 ring R, 在乘法下构成 monoid。

我们也可以让 category 不遗忘掉它的结构, 而遗忘掉它的某些性质

Examples 3.1.5. 考虑 **Ab** 到 **Grp**, 将 abelian group 映成 group, 将 homomorphism of abelian group 映成 homomorphism of group.

Remark. In common parlance, the term 'forgetful functor' has no precise definition, being simply used whenever a functor is obviously defined by forgetting something.

下一个例子是 **free functor(自由函子)**.Free functors are in some sense dual to forgetful functors.

Examples 3.1.6. 给定集合 X, 总可以构造 free group.[2] $F(X)$. 考虑从 **Set** 到 **FrGrp** 的函子如下: 将集合 X 映到 $F(X)$, 将 $f : X \to Y$ 映到 $F(f)$:

---

[2]让我们用一种比较基础的方法去严格定义这个概念, 抛去 strings, empty word or word and something like this. 考虑 X, 记 $T = X \times \{0,1\}$, 记 $(x,0) \in T$ 为 x, 记 $(x,1) \in T$ 为 x^{-1}. 记 $\pi_0 : T \to X$ 和 $\pi_1 : T \to \{0,1\}$ 为两个分量的投影映射. 若 $n \in \mathbb{N}$, 记 $[n] = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$, 定义映射 $w : [n] \to T$, 称它为 T 上一个长度为 n 的 word, 我们称一个 word 是 reduced, 如果对于所有的 $i < n-1$,$\pi_0(w(i)) = \pi_0(w(i+1)) \Rightarrow \pi_1(w(i)) = \pi_1(w(i+1))$(这一条是在说与 x 相邻的不会是 x^{-1}). 给定一个 word$w : [n] \to T$, 我们称另一个 word $w' : [n-2] \to T$ 是 one-step reduction of w, 如果存在 $i < n-1$ s.t. $\pi_0(w(i)) = \pi_0(w(i+1))$ 且 $\pi_1(w(i)) \neq \pi_1(w(i+1))$, 定义 $w'(j) = \begin{cases} w(j) & if\ j < i \\ w(j+2) & if\ j \geq i \end{cases}$ (相当于有相邻的 x 与 x^{-1} 我们就消去它们). 考虑 W 是所有 word 构成的集合, 我们称 wordw' 是 word$w$ 的 reduction, 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 以及 function$v : [n] \to W$ 使得 $v(0) = w, v(n-1) = w'$, 对每个 $i < n-1$,$v(i+1)$ 都是 $v(i)$ 的 one-step reduction. 可以证明, 对于每个 word$w$, 都存在它的唯一的 reduced word, 记为 $r(w)$. 最后我们来定义所谓乘法, 给定两个 word$w : [n] \to T; w' : [m] \to T$, 定义它们之间的乘法 $w * w' : [n+m] \to T$ by

$F(X) \to F(Y)$(将 $F(X)$ 里的 word$w$ 映为如下 word$w'(i) := f(w(i))$), 容易验证这将构成一个函子, 这就是一个自由函子。

Examples 3.1.7. 考虑 **Set** 到交换环范畴 **CRing** 的函子: 集合 S 将会映到 $F(S)$(以 S 为基而生成的 free commutative ring: 即变元取遍 S 的一个 $\mathbb{Z}$ 上的多项式环), 态射之间的映射 $f : S \to S'$ 映到 $F(f) : F(S) \to F(S')$, 它将 S 中的变元映到 S', 其他结构不变。

Examples 3.1.8. 考虑域 k, 考虑这样一个函子: $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_k$, 它将集合 X 映到以 X 为基生成的域 k 上的线性空间 (构造是这样的: $F(X)$ 是由所有的仅有有限个点不映成 0 的映射 $f : X \to k$ 的集合, 可以在上面定义加法, 定义它与 k 的数乘, 我们就得到了一个线性空间, 集合之间的映射可以自然扩充为线性空间上的线性映射.

Remark. 环和线性空间结构比较固定, 它们的约束条件相对较多, 这些特点使得构造它们相应的 free ring(vector space) 比较简单, 但是对于群或者一般的代数结构, 构造自由函子会比较困难, 主要就是我们难以构造相应的自由的代数结构。

历史上, 范畴论的起源是代数拓扑, 代数拓扑的核心思想是用代数工具来处理拓扑问题, 我们将一些拓扑对象转化维代数对象，再研究代数对象的性质来反推拓扑对象的性质, 所以许多函子就在这其中产生了。我们来看看这些最先出现的函子。

Examples 3.1.9. 记$\boldsymbol{Top_*}$ 为 **pointed space**(i.e. a topology space with a particular point, picked out from the space) 的范畴, 对象之间的态射是保持特定点不变的连续映射 (i.e. $f : X \to Y$ 且 $f(x_0) = y_0$). 考虑 $\pi_1 : \boldsymbol{Top_*} \to$ **Grp**, 将 X 映到其基本群上.

Examples 3.1.10. H_n : **Top** *to***Ab** 将 X 映到其第 n 个 homology group 上. 连续映射变成链映射诱导的同调群的同态。

Examples 3.1.11. 任何多项式方程组都会诱导一个函子 F : **CRing** $\to$

$(w * w')(i) = \begin{cases} w(i) & ifi < n \\ w'(i-n) & ifi \geq n \end{cases}$ 现在记 $F(X)$ 为 T 上的所有的 reduced words, 定义 $F(X)$ 上的乘法为 $(w, w') \mapsto r(w * w')$, 可以证明 $(F(X), \cdot)$ 为一个群, 我们称该群为 X 上的自由群

Set. 例如: 考虑

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x^3 + x = y^2 \tag{2}$$

A 是一个 commutative ring, $F(A)$ 是满足 (1), (2) 的点 $(x, y, z) \in A \times A \times A$ 的集合. ring homomorphism $f : A \to B$, $F(f) : F(A) \to F(B)$ $(x, y, z) \mapsto (f(x), f(y), f(z))$. 我们就定义了函子 F. 在代数几何中, scheme 是一个有着特定性质的函子 $F : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Set}$

Examples 3.1.12. 考虑两个群 (或者两个 monoid) G, H, 我们说过一个 group 可以被认为是一个仅含一个对象, 且上面的态射都是可逆的范畴, 在这种观点下我们将其认作是两个范畴 $\mathscr{G}, \mathscr{H}$. 现在我们想定义上面的函子 $F : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, 显然它会把唯一的对象映射到唯一的对象, 而态射需要 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ 也就是说 F 本质上就是一个 G 到 H 的群同态, 这也一定程度上体现了我们说的函子可以类比成态射之间的同态。

Examples 3.1.13. Let G be a group, regarded as a one-object category $\mathscr{G}$. 现在考虑定义函子 $F : \mathscr{G} \to \mathbf{Set}$. 首先 F 要把唯一的对象映到一个集合不妨记为 S, 对于态射 f, $F(f) : S \to S$ 是 S 上的映射, 每个 $f \in G$ 都会诱导这样一个映射, 不妨记 $F(f)(s) =: f \cdot s$, 则我们有

$$G \times S \to S$$
$$(g, s) \mapsto g \cdot s$$

并且由于 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, 我们有 $fg \cdot s = f \cdot (g \cdot s)$, 并且 $1 \cdot s = s$ 这正是群作用, 所以我们可以说一个从 $\mathscr{G}$ 到集合范畴的函子可以被认作是群作用, 反之对于任何一个 G 群作用, 我们都可以逆着回去定义一个上面的函子.

我们不仅可以要求 $f : A \to A'$ 要对应一个 $F(f) : F(A) \to F(A')$, 我们还可以反过来让他对应 $F(A') \to F(A)$ 中的某一个态射。

Definition 3.2. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories. A **contravariant functor(反变函子)** from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{D}$ is a functor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

对 $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ 的对象其 dual category 一样, 所以 functor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ 也同时声明了 $\mathcal{C}$ 的对象到 $\mathcal{D}$ 的对象对应关系, $f^{op} : A' \to A$ 在函子的作用下

要对应到 $F(f^{op}) : F(A') \to F(A)$, 并且满足 $F(f^{op} \circ g^{op}) = F(f^{op}) \circ F(g^{op})$, $F(1_A) = 1_F(A)$, 这实际上也声明了 $\mathcal{C}$ 的态射到 $\mathcal{D}$ 的态射的对应关系, 对任意的 $\mathcal{C}$ 上的态射 $f : A \to A'$, 考虑 $F(f^{op})$, 则我们有 $F(f \circ g) = F((f \circ g)^{op}) = F(g^{op} \circ f^{op}) = F(g^{op}) \circ F(f^{op}) = F(g) \circ F(f)$, 这正是我们上面提到的。

Remark. 我们可以从两种角度来看待 contravariant functor, 第一种是将它看成是对偶范畴到范畴的函子, 这可能不太直接但是表示了其本质, 第二种是将原来的函子定义中态射集的映射 $f : A \to A'$ 对应 $F(A) \to F(A')$ 中的某个态射改成对应 $F(A') \to F(A)$ 中的某个态射, 公理中第一条改成 $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, 这样会更加直接一点. 原来我们定义的函子有时也被叫做 **covariant functor(协变函子)**.

Examples 3.2.1. 一个空间的许多信息能从定义在上面的函数获得, 这是一个重要的观点。考虑拓扑空间 (X, τ_X), 记 $C(X)$ 为 X 上的连续实值函数构成的环. 加法:$p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$, $(p_1 + p_2)(x) \mapsto p_1(x) + p_2(x)$. 容易验证 $p_1 + p_2$ 在每一点都是连续的, 结合律与交换律是显然的, 幺元是 $f(x) \equiv 0$, 逆元是 $-p(x) := (-1) * p(x)$. 乘法: $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$, $(p_1 p_2)(x) \mapsto p_1(x) \times p_2(x)$, 同样容易验证 $p_1 p_2$ 在每一点都是连续的, 结合律和分配律交换性是显然的, 幺元是 $f(x) \equiv 1$. 连续函数 $f : X \to Y$ 将会诱导一个 ring homomorphism $C(f) : C(Y) \to C(X)$, 即 $q : Y \to \mathbb{R}$ 映到 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} \mathbb{R}$. 我们将在后面的习题中验证这将构成一个 contravariant functor from **Top** to **Ring**.

Remark. While this paricular example will not play a large part in this text, it is worth close attention. It illustrates the important idea of a structure whose elements are maps. The way in which C becomes a functor, via composition, is also important. Similar constructions will be crucial in later chapters. For certain classes of space, the passage from X to $C(X)$ loses no information: there is a way of reconstructing the space X from the ring $C(X)$. For this and related reasons, it is sometimes said that 'algebra is dual to geometry'.

Examples 3.2.2. 考虑 V, W 是域 F 上的两个线性空间, 记 $Hom(V, W)$ 为 V 到 W 的线性映射的全体, 则这在映射加法与数乘下构成一个线性空间. 现固定 W, 任何线性映射 $f : V \to V'$ 都将诱导一个 Hom 上的线性映射

$$f^* : Hom(V', W) \to Hom(V, W)$$

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{q} W$$

而这实际上定义了一个 $\mathbf{Vect}_F^{op}$ 到 $\mathbf{Vect}_F$ 的函子 $\mathbf{Hom}(-, W) : \mathbf{Vect}_F^{op} \to \mathbf{Vect}_F$, 他将 V 映到 $Hom(V, W)$, 将 $f \in Hom(V, V')$ 映到 $F(f) \in Hom(Hom(V, W), Hom(V', W))$ 我们有时也将这个反变函子记作 $Hom(\ , W)$. 一种特殊情况是 F 是它自己的一维线性空间. 我们可以考虑反变函子 $Hom(, F)$, 它将每个域 F 上的线性空间映到它的对偶空间上.

Remark. 我这里一开始理解的是个 $\mathbf{Vect}_F^{op}$ 到 $\mathbf{Vect}_F$ 的反变函子, 但实际上不是这样的, 他就是 $\mathbf{Vect}_F^{op}$ 到 $\mathbf{Vect}_F$ 的共变函子, 是 $\mathbf{Vect}_F$ 到 $\mathbf{Vect}_F$ 的反变函子. 原因是这样的, 一开始验证的时候, 考虑这个对偶范畴里 V 到 V' 的态射集, 按道理来说它得改变顺序才能满足映射之间的关系, 所以我以为是定义了对偶范畴到范畴的反变函子, 但仔细想想后其实不是这样的, 注意到第一个如果你认为它是对偶范畴里 V 到 V' 的态射集, 那么它本质上可能就不是 V 到 V' 的映射了, 因为它实际上应该首先是 V' 到 V 的映射, 如果它首先都不是 V 到 V' 的映射, 那定义 $F(f)$ 时复合将毫无意义. 而由于它其实时 V' 到 V 的映射, 所以我们后面定义还是按照共变函子定义的.

Examples 3.2.3. 上同调群反变函子: $H^n : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Ab}$

Examples 3.2.4. G 是一个群, 将它视为一个对象的范畴 $\mathscr{G}$, 考虑反变函子 $F : \mathscr{G}^{op} \to \mathbf{Set}$, 这将形成一个右群作用.

下面我们考虑那些到集合范畴的反变函子.

Definition 3.3. $\mathcal{C}$ 是一范畴, 我们称 $\mathcal{C}^{op}$ 到 **Set** 的函子为 **presheaf**.

就是说 presheaf 是某个范畴到集合范畴的反变函子. Motivation 是这样的. 考虑拓扑空间 (X, τ), 那么 τ 将在集合的包含意义下构成一个偏序集. 偏序集可以看成是一个范畴 (i.e. 对象就是偏序集里的元素, 对象之间的态射是它们的偏序关系, 所以态射集至多有一个元素, 态射之间的复合是偏序关系的传递), 在这里开集就是对象, 开集之间的态射是包含关系. X 上的 presheaf 就是这个范畴的 presheaf. 例如我们可以考虑函子 F 如下, 它把 $U \in \tau$ 映到所有的 U 到 $\mathbb{R}$ 的映射构成的集合上, 当 U, U' 之间的态射不为空时, 也就是两个开集有包含关系的时候, 可以把对应的映射的集合嵌入到另一个映射的集合中. 一个 presheaves 的类在现代几何中有着重要的地位.

Definition 3.4. 我们称函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是 faithful(full), 如果对任意的 $A_1,A_2\in Ob(\mathcal{C})$, 集函数 $F(f):Hom_{\mathcal{C}}(A_1,A_2)\to Hom_{\mathcal{D}}(F(A_1),F(A_2))$ 是单射 (满射).

faithful 和 full 是在模仿映射的单射与满射, 但是还是有些区别, 比方说我们这里没有要求对象之间的对应是唯一的, 实际上它也没有要求不同的态射也要对应不同的态射 (这与直觉理解所谓"单射函子"不同吧), 后者可能不是明显的, 而且甚至从定义中似乎这点是要满足的. 但是这里需要注意我们是对固定了 source 和 target 的态射, 是有可能 f 与 g 它们不同, 而且它们的 target 和 source 也不同, 但是作用过去之后是相同的态射. 比方说, 一个范畴只有两个对象, 它们的态射也只有恒等态射, 另一个范畴只有一个对象, 只有一个恒等态射, 那么我们考虑函子把两个对象都映到唯一的对象, 把两个态射都映到唯一的态射, 则这自动构成一个 faithful 函子, 但是它将两个不同的态射映到相同的态射. 这是一种合理的理解, 对于任意的 A_1,A_2,$g:F(A_1)\to F(A_2)$ 至多有一个 $f:A_1\to A_2$ 使得 $F(f)=g$; 而 full 可以解释为至少有一个 f 使得 $F(f)=g$

Definition 3.5. 给定范畴 $\mathcal{C}$, 考虑这样一个范畴 $\mathcal{D}$, 它的对象类是 $\mathcal{C}$ 的对象类的子类, $\forall D_1,D_2\in Ob(\mathcal{D})$, 它们之间的态射集是 D_1,D_2 在 $\mathcal{C}$ 的态射集的子集, 对任意的 $D\in Ob(\mathcal{D})$, 我们有 1_D(在范畴 $\mathcal{C}$ 中)$\in Hom_{\mathcal{D}}(D,D)$, 继承 $\mathcal{C}$ 中的复合运算在 $\mathcal{D}$ 中保持封闭, 我们称这样的范畴 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的子范畴 (subcategory). 特别的我们有 full subcategory, 如果对于任意的 $D_1,D_2\in Ob(\mathcal{D})$, $Hom_{\mathcal{D}}(D_1,D_2)=Hom_{\mathcal{C}}(D_1,D_2)$

子范畴类似于子集, 子群或者各种子结构, 它们继承母结构的某些特点后依然要形成一个相同的结构。而 full subcategory 实际上就是删去某些对象的范畴, 他自动满足封闭和幺元的保持, 我们可以通过声明哪些对象是没被删去的来声明 full category, 例如 **Ab** 是 **Grp** 的 full category, 通过只保留那些交换群. 对于子范畴来说, 这有一个自然的嵌入函子, 这自动构成一个 faithful functor, 而且它是 full functor 当且仅当这个子范畴是 full category. 但是需要注意的是, 与前面学的有些不一样的是, 函子的像不一定会构成子范畴. 原因是子范畴除了要求你的对象类是子类, 态射集是子集, 还得有封闭, 有可能会出现, 你把它映过去之后, 它的复合会在那个 codomain 范畴里, 但是不在范畴的像里. 例如我们如果省去恒等态射考虑 $f:A\to B;g:B'\to C$ 在函子 F 的作用下映到 $p:X\to Y;q:Y\to Z;qp:X\to Z$ 里, 其

中 $F(A)=X, F(B)=F(B')=Y, F(C)=Z, F(f)=p, F(g)=q$, 其它都满足唯有封闭是不满足的.

Exercises

1. Find three examples of functors not mentioned above.

Solution: 域 F 上的线性空间范畴到域 F 上的模范畴之间存在嵌入函子; 域 F 上的模范畴到交换群范畴之间有一个遗忘函子; 域范畴到交换群范畴之间有一个遗忘函子.

2.Show that functors preserve isomorphism. That is, prove that if $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is a functor and $A, A' \in Ob(\mathcal{C})$ with $A \cong A'$, then $F(A) \cong F(A')$

Solution: 考虑 $f \in Hom(A, A')$ 是 A, A' 之间的 isomorphism, 即存在 $g \in Hom(A', A)$ 使得 $f \circ g = id_{A'}$ 且 $g \circ f = id_A$ 考虑 $F(f) \in Hom(F(A), F(A'))$,$F(g) \in Hom(F(A'), F(A))$, 我们有 $F(f \circ g) = F(id_{A'}) = id_{F(A')} = F(f) \circ F(g)$, 同理 $F(g \circ f) = id_{F(A)} = F(g) \circ F(f)$.

3.Given ordered sets C and D, and denoting by $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ the corresponding categories, show that a functor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ amounts to an order-preserving map $C \to D$

Solution: 考虑 $c_1, c_2 \in C$, 若 $c_1 \le c_2$, $Hom(c_1, c_2) = f$ 则 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(c_1), F(c_2))$, 即存在 $F(f)$ 使得 $Hom_{\mathcal{D}}(d_1, d_2) = F(f)$, 即 $F(c_1) = d_1 \le d_2 = F(c_2)$. 于是考虑该函子对象类上的映射确定了一个 order-preserving map.

4.Two categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are isomorphic, wirtten as $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, if they are isomorphic as objects of **CAT**

- Let G be a group, regarded as a one-obeject category all of whose maps are isomorphisms. Then its opposite G^{op} is also a one-object category all of whose maps are isomorphisms, and can therefore be regarded as a group too. What is G^{op}, in purely group-theoretic terms? Prove that G is isomorphic to G^{op}
- Find a monoid not isomorphic to its opposite.

在证明之前我们先说明一下两个范畴同构的含义, 实际上由于我们考虑的范畴都是 locally small 的, 我们不可能将所有范畴和它们所有的函子都考虑成一个范畴, 原因是对于两个一般的范畴 (即使它是 locally small 的) 它们之间的函子不可能会构成一个集合, 这破坏了我们要求的 locally small 条件,

所以我们这里说两个范畴同构是对于 small category 说的.

Solution: G^{op} 在从群论的观点来看就是群 G 的 oppsite group(i.e. 群元相同, 但是新的群乘法定义为 $g_1 \star g_2 := g_2 \cdot g_1$). 由于 G 和 G^{op} 两个都是 small category, 所以我们可以讨论它们是否是 isomorphic. 注意这两个范畴是不一样的, 虽然它们的态射集和对象集都是一样的, 但是它们之间的复合运算是不一样的. 所以考虑 F_1 把唯一的对象映到唯一的对象, 它把群元 (态射) 映到它自己, 这不会是一个函子, 但是 F 将唯一的对象映到唯一的对象, 把群元映到它的逆这将构成一个函子:$F(f \circ g) = ((f \circ g)^{-1})^{op} = (g^{-1} \circ f^{-1})^{op} = (f^{-1})^{op} \circ (g^{-1})^{op} = F(f) \circ F(g)$, F' 是将 G^{op} 映到 G 的函子, 那么 F_1, F_2 是 isomorphic, 即这两个范畴是 isomorphic.
考虑集合 $X = \{a, b\}$, 那么 4 个 $X \to X$ 的映射在映射复合下构成一个幺半群, 记作 $id = f_1, f_2, f_3, f_4$. 由于我们需要两个函子复合后为恒等函子, 所以我们至少需要这两个函子所决定的态射集上的映射是双射, 再有 $F(f_2 \circ f) = F(f_2) \circ F(f) \Rightarrow F(f_2) = F(f_2) \circ F(f)$, 但这样的函子是不存在的.

5.Is there a functor $Z : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ with the property that $Z(G)$ is the centre of G for all groups G

Solution: 考虑把群 G 映到其平凡子群 $\{e_G\}$ 上. 所有的群同态都映到平凡同态, 其平凡子群显然是其中心.

6.Sometimes we meet functors whose domain is a product $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ of categories. Here you will show that such a functor can be regarded as an interlocking pair of families of functors, one defined on $\mathcal{C}$ and the other defined on $\mathcal{D}$.(This is very like the situation for bilinear and linear maps.)

a) Let $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ be a functor. Prove that for each $C \in \mathcal{C}$, there is a functor $F^C : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ defined on objects $D \in \mathcal{D}$ by $F^C(D) = F(C, D)$ and on maps g in $\mathcal{D}$ by $F^C(g) = F(1_C, g)$. Prove that for each $D \in \mathcal{D}$, there is a functor $F_D : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ defined similarly.

b) Let $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ be a functor. With notation as in a), show that the families of functors $(F^C)_{C \in \mathcal{C}}$ and $(F_D)_{D \in \mathcal{D}}$ satisfy the following two conditions: if $C \in \mathcal{C}$ and $D \in \mathcal{D}$ then $F^C(D) = F_D(C)$; if $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ and $g : D \to D'$ in $\mathcal{D}$ then $F^{C'}(g) \circ F_D(f) = F_{D'}(f) \circ F^C(g)$

c) Now take categories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ and $\mathcal{E}$, and take families of functors $(F^C)_{C \in \mathcal{C}}$

and $(F_D)_{D\in\mathcal{D}}$ satisfying the two conditions in b). Prove that there is a unique functor $F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ satisfying the equations in a).('There is a unique functors' means in particular that there is a functor, so you have to prove existence as well as uniqueness.)

Solution:

a) 我们只需要证明 F^C 即可. F 是一个函子意味着存在一个对象类到对象类的映射, 对每一个 $C\in\mathcal{C}$, F 将诱导一个 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{E}$ 的对象类的映射, 即 $F^C(D)=F(C,D)$. 同时 F 还对每一个 (C_1,D_1) 到 (C_2,D_2) 的态射集定义了到 $Hom(F(C_1,D_1),F(C_2,D_2)$ 的映射, 考虑 $F^C(g)=F(1_C,g)$, $F^C(g_1\circ g_2)=F(1_C,g_1\circ g_2)=F((1_C,g_1)\circ(1_C,g_2))=F(1_C,g_1)\circ F(1_C,g_2)=F^C(g_1)\circ F^C(g_2)$, 保持幺元: $F^C(1_D)=F(1_C,1_D)=1_{F^C(D)}=1_{F(C,D)}$

b) 第一个条件是显然的, LHS=$F(f,g)$, RHS=$F(f,g)$, 故 LHS=RHS

c) 考虑函子 $F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$, 它将 (C,D) 映到 $F^C(D)$. 而将 (f,g) 映到 $F^{C'}(g)\circ F_D(f)$, $F(f_1\circ f_2,g_1\circ g_2)=F^{C''}(g_1\circ g_2)\circ F_D(f_1\circ f_2)=F^{C''}(g_1)\circ F^{C''}(g_2)\circ F_D(f_1)\circ F_D(f_2)=F^{C''}(g_1)\circ F_{D'}(f_1)\circ F^{C'}(g_2)\circ F_D(f_2)=F(f_1,g_1)\circ F(f_2,g_2)$ 对于 identity 的验证同样, 所以我们构造了一个函子 F. 该函子导出的两个分量上的函子恰为我们开始所定义的函子. 如果我们还存在一个函子 F' 满足导出的两个分量上的函子恰为我们开始定义的函子, 则对象类上的映射与上述定义的函子相同,$F(C,D)=F^C(D)$, $F^C(C,D)=F'^C(D)=F'(C,D)$, 对 $F'(1_C,g)=F'^C(g)=F^C(g)=F(1_C,g)$ 对另一个分量同样, 则 $F(f,g)=F(f,1_D)\circ F(1_C,g)=F'(f,1_D)\circ F'(1_C,g)=F'(f,g)$ 这个定理告诉我们, 乘积范畴上的函子可以被两类分量函子确定. 首先它可以导出两类分量函子, 满足两个条件, 其次对于两类满足条件的分量函子, 我们可以唯一的构造一个乘积范畴上的函子使得它的分量函子恰为我们构造它用的两类分量函子.

7. Fill in the details of Example 3.2.1, thus constructing a functor $F:\mathbf{Top}^{op}\to\mathbf{Ring}$

我们只用验证 $F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$ 与 $F(1_X)=1_{F(X)}$, 对前者, $F(f\circ g)\in Hom(C(Z),C(X))$ $m\mapsto m\circ f\circ g=F(g)(F(f)m)=m\circ f\circ g$. $F(1_X)m=m$ 所以 $F(1_X)=1_{F(X)}$

8.Find an example of a functor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ s.t. F is faithful but there exist distinct maps f_1 and f_2 in $\mathcal{C}$ with $F(f_1)=F(f_2)$

Solution: 我们已经在上面说过了

9. SEE BELOW

a) Of the examples of functors appearing in this section, which are faithful and which are full.

b) Write down one examples of a functor that is both full and faithful, one that is full but not faithful, one that is faithful but not full, and one that is neither.

Solution: Eg 3.1.2 是 faithful not full , eg3.1.3 is faithfual not full, eg3.1.4 is faithful and not full(faithful 的原因是对于任意一个环同态, 他首先是一个群同态, 所以遗忘乘法后每个不同的群同态映过去都是不同的群同态, not full 的原因是构成群同态的映射它不一定会构成环同态.) eg3.1.5 is faithful and full, eg3.1.6 is faithful and full(faithful 的原因是不同映射将会有不同的群同态, 它至少会把每个字母映到不同的字母, not full 的原因是我们有平凡群同态不会把字母映到字母上), eg3.1.7 is faithful and not full, eg3.1.8 is faithful and full(not full 的原因是平凡线性映射不会决定一个集合间的映射),eg3.1.9 not faithful not full(原因是不同的连续映射会诱导相同的基本群同态) eg3.1.10 not faithful not full((同伦) 的连续映射将诱导相同的群同态) eg3.1.11 is faithful and not full eg3.1.12 is faithful iff F can be regarded as monomorphism, it is full iff F can be regarded as epimorphism. eg3.1.13 is faithful iff F can be regarded as faithful group action, it's full iff $|S|\ leq1$ eg3.2.1 is not faithful and not full eg3.2.2 is faithful not full eg3.2.3 not faithful and not full eg3.2.4 is same as 3.1.12 eg3.2.4 not must be anything. 我们已经在上面的例子看到了所有这四种例子了。

4 What is Natural Transformation

我们已经知道了范畴, 函子就像是范畴之间的态射, 我们可以继续问, 当函子作为对象时, 函子之间的态射应该是什么, 这就是自然变换 natural transformation. 我们从简单的例子开始引入这个概念, 考虑离散范畴 $\mathcal{C}$(即态射只有单位态射) 到范畴 $\mathcal{D}$ 的函子 F_1, 我们实际上只要声明 F_1 把 $\mathcal{C}$ 的对象映到哪里即可, 同样的另一个函子也是一样的, 如果我们要做出类似函子之间的映射的东西, 我们只需要考虑函子 F_1 所决定的对象应该对应到 F_2 所决定的哪些对象 (举个例子来说如果我们的 $\mathcal{C}$ 的对象类是正整数, 那么函

子 F_1 实际上是一个序列 $(f_1, f_2, \ldots)$ 分别是 1 对应的对象,2 对应的对象等等, 同理 F_2 也是一个序列 $(k_1, k_2, \ldots)$, 那么我们只需要声明 f_i 对应谁就行了)

Definition 4.1. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ be categories and let $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ be functors. A **natural transformation** $\alpha : F \to G$ is a family $(F(C) \xrightarrow{\alpha_C} G(C))_{C \in \mathcal{C}}$ of morphisms in $\mathcal{D}$ such that for every morphism $C \xrightarrow{f} C'$ in $\mathcal{C}$, the square

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & F(C') \arrow[d, "\alpha_{C'}"] \\
G(C) \arrow[r, "G(f)"'] & G(C')
\end{tikzcd}$$

commutes. The maps α_C are called the components of α

自然变换是一族在 $\mathcal{D}$ 中的态射. 如果说存在某个 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $F(C)$ 到 $G(C)$ 的态射集是空集, 那么我们就不可能定义自然变换. 我们来捕捉这个定义的 motivation, 我们希望定义一个类似于函子之间的同态的东西。考虑 $f : C \to C'$, 函子 F 会把它作用到 $F(f) : F(C) \to F(C')$, 函子 G 会把它作用到 $G(f) : G(C) \to G(C')$, 我们希望这个函子的“映射”会保持这个关系 (同态), 什么意思呢? 函子间的映射应该是什么? 直觉上它应该有 $F(C)$ 到 $G(C)$ 之间的映射, 应该有 $F(f)$ 到 $G(f)$ 之间的映射, 保持这个关系是图右上边应该和图左下边是“平行”关系, 相当于说你走上面一遍, 应该相当于你 $F(C)$ 与 $G(C)$ 的对应关系, 通过 $F(f)$ 与 $G(f)$ 的对应关系要保持和右上边一样, 这应该是一种合理的解释.

Examples 4.1.1. 考虑范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$, F, G, H 是它们之间的函子, α 是 F, G 之间的自然变换, β 是 G, H 之间的自然变换. 即下图上下两个方框交换

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & F(C') \arrow[d, "\alpha_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_C"'] & G(C') \arrow[d, "\beta_{C'}"] \\ H(C) \arrow[r, "H(f)"] & H(C') \end{tikzcd}$$

那么我们可以考虑 $\gamma = (\beta_C \circ \alpha_C)_{C \in \mathcal{C}}$, 则这是 F, H 之间的自然变换, 我们称为自然变换的复合. 现在我们以两个范畴之间的所有函子作为对象类 (这构成一个类是因为它实际上是 $Ob(\mathcal{C})^{Ob(\mathcal{D})} \times Hom(\mathcal{C})^{Hom(\mathcal{D})}$ 是两个类的积), 对函子 F, G, 它们之间的态射为 F, G 之间的所有自然变换, 复合定义成上述自然变换的复合. 但是这里又有一个问题, 两个范畴之间的所有函子即使是对于 locally small 的范畴它们的函子也不一定会构成集合, 它甚至可能会比 proper class 还大, 但是对于 small category 来说是构成集合的. 这是因为一个自然变换可以视作 $\prod_{C \in \mathcal{C}} (Hom(F(C), G(C)))$ 的子集. 同样我们有一个 identity natural transformation. $id_F : F \to F$ 是所有 identity morphism 构成的。容易验证结合律, 那么如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 small category, 以他们之间的函子为对象, 函子之间的自然变换为态射我们得到了一个新的范畴, 称为 functor category from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{D}$, 记作 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$

Definition 4.2. F, G 是范畴 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 上的函子, α 是 F, G 之间的自然变换, 如果对于任意的 $C \in \mathcal{C}$, α_C 是 $\mathcal{D}$ 中的 isomorphism, 我们称该自然变换是 natural isomorphism.

这条性质和存在 G 到 F 的自然变换 β 使得 $\beta \circ \alpha = id_F$ 且 $\alpha \circ \beta = id_G$. 等价

在范畴论中我们对对象的限制是很少的, 主要的概念是态射, 如果我们想让两个对象 A, B 看起来是一样的其实不需要关心对象 A, B 它自己真正长什么样, 我们只需要关心这个对象 A 和其它对象之间的态射是不是和 B 是一样的就行了, 而态射的主要表现在它们之间的复合, 如果说 f 与 g 的复合以及 g 和 f 的复合都是为单位态射 (单位态射基本上捕捉了对象不变的特性), 那说明 f 和 g 基本上使得 A 到 B 是不变的,B 到 A 是不变的 (这是一种比较粗糙的说法, 我们之所以考虑到将复合等于单位映射定义成同构来捕捉它们两个本质上是相同的根本原因是当你去考虑它们 C, C' 与其它对象的态射时候,C, C' 之间的相互同构的态射会自然导出另一个态射, 例

如 $f: C \to C'$,$g: C' \to C$,$n: C \to N$, 我们可以直接用 $n \circ g: C' \to N$ 获得 C' 到 N 的态射, 而这个态射再符合上 f 恰为 n 这说明 C' 到 N 的态射差不多就是 C 到 N 的态射); 如果我们想要两个范畴看起来是一样的, 我们至少得让它的对象看起来是一样的, 看起来一样的对象的态射也应该看起来一样, 还得有复合之间看起来是一样的, 所以我们想要捕捉所谓范畴是一样的我们很自然的可以想到用函子来刻画他, 即存在函子 F, G 使得 $FG = 1_{\mathcal{D}}$,$GF = 1_{\mathcal{C}}$. 这样我们称两个范畴是 isomorphic 的, 这意味着两个范畴除去对象和态射的表示之外其内涵是完全一样的。

而自然同构则是说这两个函子基本上是一样的 (它把相同的对象映成基本相同的对象 $(F(C), G(C)$ 两个是 isomorphic),$F(f)$ 和 $G(f)$ 也基本上差不多是一个东西, 因为从图上看来它们会把基本相同的东西映成基本相同的东西). 上面两个范畴同构实在是太强了, 这基本就是说这两个玩意一模一样 (就像同胚), 我们希望有稍微弱一点的东西, 能差不多一样就行了 (就像同伦), 处于这种考虑用自然同构定义 equivalence between categories.

Definition 4.3. 如果范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 上存在两个函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 使得存在两个自然同构 $\alpha: F \circ G \to 1_D$ 和 $\beta: G \circ F \to 1_C$, 则我们称这两个范畴是 equivalent, 记作 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, we also say that the functors F and G are equivalences.(等价函子)

注意两个范畴同构, 我们只需要用到函子来刻画就行了, 但是这个太强了, 我们不需要它们的复合和单位函子一模一样, 只需要差不多一样就行了, 我们需要描述这两个函子的关系, 所以定义稍弱的范畴等价我们需要用到自然变换来描述函子的关系, 此时这两个函子也不是互逆的, 而是差不多互逆的, 所以也叫等价。这里很像定义同胚和定义同伦的关系.

Definition 4.4. $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子, 我们称它是 essentially surjective on objects 如果对于任意的 $D \in \mathcal{D}$ 都存在 $C \in \mathcal{C}$ 使得 $F(C)$ 与 D 是同构的.

lemma 4.1. $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是等价函子当且仅当 F 是 *fully faithful and essentially surjective on objects.*

证明. $\Rightarrow$: 由于 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是等价函子, 所以存在 $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 使得函子 $F \circ G: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}$ 上的恒等函子 1_D 是自然同构的, 所以我们有

$$\begin{tikzcd}
(F\circ G)(D) \arrow[r, "(F\circ G)(f)"] \arrow[d, "\alpha_D"'] & (F\circ G)(D') \arrow[d, "\alpha_{D'}"] \\
1_D(D) \arrow[r, "1_D(f)"] & 1_D(D')
\end{tikzcd}$$

由于 α_D 和 $\alpha_{D'}$ 是同构, 所以 $(F\circ G)(D)\cong 1_D(D)=D$, 即对于任意的 $D\in\mathcal{D}$ 我们都有 $F(G(D))\cong D$ 即它是 essentially surjective on objects.

考虑 $f_1 : C\to C'$, $f_2 : C\to C'$, 且 $F(f_1)=F(f_2)$,

$$\begin{tikzcd}
(G\circ F)(C) \arrow[r, "(G\circ F)(f)"] \arrow[d, "\beta_C"'] & (G\circ F)(C') \arrow[d, "\beta_{C'}"] \\
1_{\mathcal{C}}(C) \arrow[r, "1_C(f)"] & 1_{\mathcal{C}}(C')
\end{tikzcd}$$

那么 $f_1\circ\beta_C=\beta_{C'}\circ(G\circ F)(f_1)$ 则 $f_1=\beta_{C'}\circ(G\circ F)(f_1)\beta_C^{-1}$ 同理 $f_2=\beta_{C'}\circ(G\circ F)(f_2)\beta_C^{-1}$, 由于 $F(f_1)=F(f_2)$ 所以 $f_1=f_2$, 即 faithful.

考虑 $m\in Hom(F(C),F(C'))$, 考虑 $G(m)\in Hom(G(F(C)),G(F(C')))$, 考虑 $\beta_{C'}\circ G(m)\circ\beta_C^{-1}\in Hom(C,C')$, $\beta_{C'}\circ G(m)=\beta_{C'}\circ(G\circ F)(\beta_{C'}\circ G(m)\circ\beta_C^{-1})$, 即 $G(m)=(G\circ F)(\beta_{C'}\circ G(m)\circ\beta_C^{-1})$, 由于 G 是 faithful 的, 所以 $m=F(\beta_{C'}\circ G(m)\circ\beta_C^{-1})$, 即存在 $T=\beta_{C'}\circ G(m)\circ\beta_C^{-1}\in Hom(C,C')$ 使得 $F(T)=m$, 即 full.

$\Leftarrow$:

因为 F 是 essentially surejective, 所以我们对于任意的 $D\in\mathcal{D}$, 都可以找到 $C_D\in\mathcal{C}$ 使得 $F(C_D)\cong D$, 考虑 $G(D)=C_D$(whatever it's, we only select one, maybe higher version of Axiom of Choice is required.) 除此之外我们还得定义 $Hom(D,D')\to Hom(G(D),G(D'))$ 考虑 $g : D\to D'$, 则 $F(C_D)\cong D\xrightarrow{g} D'\cong F(C_{D'})$, 记 $F(C_D)$ 与 D 之间的同构为 t_D,$F(C_{D'})$ 与 D' 之间的同构为 $t_{D'}$, 那么我们可以构造 $F(C_D)$ 到 $F(C_{D'})$ 的态射 $t_{D'}\circ g\circ t_D$, 由于 F 是 fully faithful 的, 那么存在唯一的 $f : C_D\to C_{D'}$ 使得 $F(f)=t_{D'}\circ g\circ t_D$, 我们令 $G(g)=f$, 验证 G 为函子, 以及 G 与 F 等价. □

若 $F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ 是函子, 则 $\mathcal{C}$ 中的每一个对象 C 都将诱导一个自然

函子 $h_C := Hom(C,)$, 它把 $X \in \mathcal{C}$ 映到 $Hom(C,X)$ 这个集合里, 它把 $f : X \to Y$ 映到 $h_C(f) : Hom(C,X) \to Hom(C,Y)$,$h_C(f)$ 是一个集函数, 它把 $g \in Hom(C,X)$ 映到 $f \circ g \in Hom(C,Y)$

Theorem 4.1 (Yoneda Lemma)**.** *Let F be a functor from $\mathcal{C}$ to **Set**. Then for each object C in $\mathcal{C}$, the natural transformations $Nat(h_C, F)$ from h_C to F are in one-to-one correspondence with the elements of $F(C)$. That is,*

$$Nat(h_C, F) \cong F(A).$$

参考文献

[1] Tom Leinster. Basic category theory. https://arxiv.org/abs/1612.09375, 2016.